1　2021年合同教育全道研究集会　数学教育分科会報告　　成田　收

数学教育分科会は小・中・高・大など11名の参加で、完全オンラインで3時間という短時間で行われた。

今年の合同教研数学分科会には、中学校、高校、大学の教育学部の教科教育法数学、数理論理学一般などの分野からレポートが寄せられた。しかし、小学校の教員による算数教育をテーマとしたレポートは寄せられなかった。また、参加者中現役教員は4割弱であった。

学校現場の余裕の無さを表しているのだろうか。あるいは、組合活動の中に、教科教育研究の占める重要性の比重が軽くなってきたのであろうか。あるいは、教科教育における教師の裁量権が奪われてしまったことが原因なのであろうか。

これらの状況分析のための活動が重要性を増していると考えられる。いずれにしろ、教育現場の実情を知るものが一同に会して分析をする、あるいは、調査を行うことが急務とも考えられる。COVID-19の蔓延で、質の異なる多忙さと、人と人がコミュニケーションをとること自体に困難が伴う中、合同教研の持ち方を議論すること自体が困難を伴うことであろう。しかし、ここは、工夫を重ねて、民主的な子供を大切にする教科教育のあり方を議論する場としての合同教研教科別分科会のあり方の方向性を再度議論する最後のチャンスを迎えていることは肝に銘じておくべきと考える。

今年寄せられたレポートは次の5本であった。

1.　「私の数学科教育法」　氏家　英夫
2.　「アリストテレス論理学から現代論理学へ」　真鍋　和弘
3.　「くふうってなに？」　大竹　宏周
4.　「大学入試問題の分析」　清水　大惇
5.　「星型多角形の内角の和とその作図」　成田　收

一つ一つ、大変価値あるものと考える。以下、各レポートとそこで行われた検討の内容を紹介する。

2　「私の数学科教育法」　氏家　英夫

室蘭工大で行われた教科教育法の集中講義の報告である。雑誌「ひと」の紹介、仮説実験授業の紹介にはじまり、面積、かけ算、小数、内包量、量と数、量と関数（1次、2次関数)、指数関数、対数関数、落下運動と微分、など、氏家英夫の研究の成果と実践報告が中心となるカリキュラムで、最後にはミニ授業のプラン作成で終わる。

受講学生は29名、それぞれ、1日4講× 4日間に熱心に取り組み、提出レポートには、実験を取り入れた授業に感動し、教職に夢を持ったことが綴られている。

できれば、多くの教員を目指す学生にこのような機会が与えられないものだろうか、ということが議論された。

学生の感想は

　　先日の授業はとても勉強になりました。

特に仮説実験授業やドン・ガバチョ村のストーリー仕立ての面積の授業が印象に残って います。
実験は大学生でも迷う問題があったので楽しかったです。
数学では実験のようなことは難しいと思っていたので驚きでした。
途中で紹介のあった「ぼくらはガリレオ」などの本も早速読みます。
最後の模擬授業では、様々な授業を聞けたので、良いと思ったものは真似して取り入れていきたいと思いました。
今回学んだことを教育実習や教員になった後に生かしていきます。 ありがとうございました。

というものであった。

「私の数学科教育法」講座内容:

10 月 2 日

1 講	・教育内容構成と授業（プリント） ・かな文字指導（須田清『かな文字の指導』)（雑誌『ひと』」横森論文） ・水道方式タイルと量の理論（遠山啓『数 学の教え方学び方』)（雑誌「ひと」岡田論 文）
2 講	・仮説実験授業「浮力」の授業 『授業書３力学編』仮説実験授業研究会 ・板倉聖宣「仮説実験授業の基礎理論」『仮説実験授業入門』明治図書
3 講	・課題の提示 ミニ授業プラン ○授業プランの作り方　面積プランを例に
4 講	○小学校の面積指導 「ドンガバチョ村の水そうどう」（氏家 修論） 佐藤敬行・須田勝彦「小学校 4 年「面積」の指導」（教授学の探究ＮＯ２４）

10 月 3 日

1 講	●かけ算プラン 須田勝彦・氏家英夫「分配法則を軸とした乗法指導の試み」 （教授学の探究ＮＯ２）そ の２（探究ＮＯ４）
2 講	●小数プラン 須田勝彦「授業書＜小数とは何か＞による授業」（探究ＮＯ３）
3 講	●内包量プラン 須田勝彦「数学的概念の形成ー内包量の指導過程」『講座日本の教育第 6 巻』
4 講	○高校生のための量と数 氏家英夫「高校数学における量と関数の指導」（探究ＮＯ２９）所収

10 月 9 日

１講	○１次関数と２次関数 氏家英夫「高校数学における量と関数の指導」（探究ＮＯ２９）所収
２講	○指数関数とｅ 氏家英夫「高校数学における量と関数の指導」（探究ＮＯ２９）所収
３講	○対数メガネ 氏家英夫「高校数学における量と関数の指導」（探究ＮＯ２９）所収
４講	○面積と積分 氏家英夫「連載 私の授業 積分と微分」 『数学教室』２０１７年４月～７月

10 月 10 日

１講	○落下運動と微分 氏家英夫「連載 私の授業 積分と微分」『数学教室』２０１７年４月～７月
２講～４講	・ミニ授業

※「探究」は北海道大学　教授学の探求

https://eprints.lib.hokudai.ac.jp/journals/index.php?jname=194

よりダウンロード可能

3　「アリストテレス論理学から現代論理学へ」　　　　真鍋　和弘

　現代数学の基礎に「集合と論理」がある。
小学校数学に「集合」が登場し、混乱したこともある。
その反省から自制的になったが、高校にはいまだに「集合と論理」の単元がある。
にもかかわらず、「論理」はきちんと整理されて扱われているとは言い難い。
　このレポートでは、古典論理と現代論理の違い、とくに「ならば」の扱いを通じて、「論理」を整理し、高等学校での現代論理学の扱いの展望を述べている。

3.1　アリストテレスの三段論法

　アリストテレスの三段論法とは、次のような推論規則である。

すべての人間は死ぬ。　(大前提 1)
アリストテレスは人間である。　(小前提)
したがってアリストテレスは死ぬ。(結論)

大前提 1 と小前提を仮定すると、正しい (真の) 結論が導かれる。
ところが大前提 1 の「すべて」を「ある」に替えて

ある人間は死ぬ。(大前提 2)

とすると、間違った (偽の) 結論が導かれる。
論理には微妙な落とし穴があり、古代から論理学を学ぶことは困難を伴うものであった。
論理記号を導入して、命題を A,B,C などの大文字で表し、「ならば」を $\rightarrow$ で表し、「かつ」を $\wedge$、「または」を $\vee$、「〜でない」を $\neg$ で表すと、アリストテレスは三段論法は

すべての B は C である。
すべての A は B である。
したがって、すべての A は C である。

という推論規則である。
論理記号を使うとこれは

$$[(B \rightarrow C) \wedge (A \rightarrow B)] \rightarrow (A \rightarrow C)$$

と簡単に表せる。
数学では、モーダス・ポーネンス (modusponens) と呼ばれる推論規則がよく使われる。カットと呼ばれるともある。これも三段論法の一種と考えられている。

$$[A \wedge (A \rightarrow B)] \rightarrow B$$

アリストテレス論理学の最高峰と見なされている「定言三段論法」とは、次のような 4 つの定言命題を扱っている。

すべての P は Q である。(全称肯定命題)
すべての P は Q でない。(全称否定命題)
ある P は Q である。(特称肯定命題)
ある P は Q でない。(特称否定命題)

これらを上の三段論法の大前提、小前提、結論の 3 つの各段にそれぞれ当てはめると、全部で $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$(通り) の組合せが考えられる。
これら 64 通りのうち、論理的に正しい三段論法は 6 通りだけである。
このようなことを研究したのが古典論理学である。

3.2 現代論理学の誕生

ここで新たな論理記号として、変数 x と命題関数 $P(x)$ を導入する。例えば「x は人間である」を $P(x)$ などと表す。$P(x)$ は述語と呼ばれることもある。後で示すように、述語論理は 19 世紀のドイツの数学者フレーゲによって確立されたものである。
次に量化記号 $\forall$ と $\exists$ を導入し
「すべての x に対して」を $\forall x$ で表し、全称記号と呼ぶ。
「ある x が存在して」を $\exists x$ で表し、存在記号と呼ぶ。
アリストテレスの定言命題は、これらの論理記号を使うと次のように表すことができる。

$$
\begin{array}{ll}
\forall x(P(x) \to Q(x)) & \text{(全称肯定命題)} \\
\forall x(P(x) \to \neg Q(x)) & \text{(全称否定命題)} \\
\exists x(P(x) \land Q(x)) & \text{(特称肯定命題)} \\
\exists x(P(x) \land \neg Q(x)) & \text{(特称否定命題)}
\end{array}
$$

上の論理式を日本語に直訳すると (むしろ英語訳に近い)、

すべての x に対して、$P(x)$ ならば $Q(x)$ である。
すべての x に対して、$P(x)$ ならば $Q(x)$ でない。
ある x が存在して、$P(x)$ かつ $Q(x)$ である。
ある x が存在して、$P(x)$ かつ $Q(x)$ でない。

となる。
もちろんアリストテレスの定言命題と述語論理を用いた定言命題とは、厳密には同じものではない。

3.3 述語論理とは

フレーゲは 1879 年に『概念記法』という本を著した。これにより現代論理学の骨格が完全に近いかたちで示された。

基本的アイデアは、論理記号として変数 x や関数記号 $f(x)$ を流用することであった。ある領域 (集合) の中で、変化するものを「変数」と呼び $x, y, z, \cdots$ などで表す。また、変化しない特定のものを「定数」と

呼び $a, b, c, \cdots$ などで表す。

前節の述語 $P(x)$ は厳密には命題ではないが (x によって真偽が変わるから)、$P(a)$ は真偽が定まるので命題である。

一般に、

$$\begin{array}{lll} \text{「すべての } x \text{ に対して、} A(x) \text{ がなりたつ」} & \text{は} & \forall x A(x) \\ \text{「ある } x \text{ が存在して、} B(x) \text{ がなりたつ」} & \text{は} & \exists x B(x) \end{array}$$

などと表される。

領域を人間全体とする。x は不特定の人間を表し、例えば a はアリストテレスという固有名詞を表すことにする。

「x は人間である」を $P(x)$、

「x は死ぬ」を $Q(x)$ で表す。

すると「すべての人間は死ぬ」という命題は

$$\forall x(P(x) \to Q(x))$$

と表される。

直訳すれば

すべての x に対して「x が人間ならば x は死ぬ」となる。

したがって第 1 節の三段論法は、論理式をつかって次のように簡単に表せる。

$$\begin{array}{ll} \forall x(P(x) \to Q(x)) & \text{(大前提)} \\ P(a) & \text{(小前提)} \\ Q(a) & \text{(結論)} \end{array}$$

*1

このように、述語論理を用いることで、これまでの伝統的論理学では表現することができなかった数学の内部構造を論理式として表現できるようになった。

まとめると、述語論理とは次の記号からなる論理式の列のことである。

(1) 定数 $a, b, c, \cdots$ と変数 $x, y, z, \cdots$.

(2) 接続記号 $\to, \wedge, \vee, \neg$.

(3) 量化記号 $\forall, \exists$.

(4) 述語記号 $P(x), P(x, y), \cdots, \forall P(x), \forall x \exists x P(x, y), \cdots$

3.4 「ならば」について

現代論理学における接続詞「ならば」$\to$ の定義は、アリストテレスの時代の定義と異なるので注意が必要である。

---

*1 この三段論法が、正しい推論であることは以下のように示される。(大前提) はすべての x に対してなりたつから、当然 x が a のときにもなりたつ。x に a を代入しても、この論理式はなりたつから $P(a) \to Q(a)$ である。(小前提) から $P(a)$ も真である。よってモーダス・ポーネンスにより $Q(a)$ は真となる。

伝統的論理学では、「A は B である」あるいは「A ならば B である」$A \to B$ の真偽は、
A(真) で B(真) のとき、$A \to B$ は (真)
A(真) で B(偽) のとき、$A \to B$ は (偽) とされていた。

しかし現代論理学では「ならば」$\to$ を、一般の接続詞「かつ」$\wedge$、「または」$\vee$ などと同様に、A が (偽) の場合にも拡張する必要があった。そこで、
A(偽) で B(真) のとき、$A \to B$ は (真)
A(偽) で B(偽) のとき、$A \to B$ は (真) のように定めることになった。

これらをよく眺めると、結局
論理式 $A \to B$ は、論理式 $\neg A \vee B$ と同等となる。
ロジックが専門の竹内外史さんでさえ「この < ならば > の用い方は、通常言語の < ならば > の使い方と違うので、最初のうち妙に感ずる人がいるが、数学での < ならば > の用い方が、$\neg A \vee B$ であることを認識して慣れるより仕方がない」と書いている。

一方で、同じ専門家の本橋信義さんは、最近の著書の中で次のように述べている。

> 現在は、私の知る限り、高校数学の教科書の中で用いられる「ならば」は法則を表す「ならば」に統一されています。
> しかし、大学数学や数理論理学の中では新しい「ならば」が主流です。
> 古い「ならば」と新しい「ならば」の区別がついていれば良いのですが、現実には、区別をきちんと意識している文献はまず、ありません。これが、「ならば」についての大きな騒乱の原因の一つです。

3.5　定言命題を述語論理で形式化する

アリストテレスの 4 つの定言命題が述語論理を用いると、次のように定式化できる。
$\Leftrightarrow$ は論理的に同等であることを表す記号で、$(A \to B) \wedge (B \to A)$ のとき $A \Leftrightarrow B$ と書く。

すべての P は Q である	$\Leftrightarrow$	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	(1)
すべての P は Q でない	$\Leftrightarrow$	$\forall x(P(x) \to \neg Q(x))$	(2)
ある P は Q である	$\Leftrightarrow$	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	(3)
ある P は Q でない	$\Leftrightarrow$	$\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$	(4)

これができると、アリストテレスの三段論法の大前提、小前提、結論にこれらの (1)(2)(3)(4) の命題を当てはめた 64 通りの命題の真偽の議論は、述語論理の記号で表された式の、単なる論理計算によって、その真偽を知ることができる。

述語論理の利点は、推論過程 (証明) を論理計算として行えることである。歴史的にも述語論理は述語計算と呼ばれていた。

3.6　高校の論理教材について

レポーターの真鍋さんは、「ならば」を巡る混乱は「数学教師が大学で数理論理学をきちんと学ぶ機会を与えられていない」という日本における高等教育制度の不備から来ていると感じられる。

いろいろな高校教科書の中で、古い「ならば」だけを扱ってもよいし、古い「ならば」と新しい「なら

ば」を両方扱う教科書があってもよいと思う。

多少、記述が長くなっても、それらの違いをきちんと記述することが一番大切なことではないだろうか。

また、高校教科書における「論理」については、もう少し学問的にきちんと記述しなければならない。

例えば、生徒たちがよく間違える「必要条件」「十分条件」の区別も、(1) を右辺のかたちに書くことですっきりする。

命題 $\forall x(P(x) \to Q(x))$ がなりたつとき、「$P(x)$ は $Q(x)$ の十分条件」、「$Q(x)$ は $\mathrm{P}(x)$ の必要条件」と簡潔に定義できる。

扱いの難しい接続詞「ならば」や、命題と命題関数、命題論理と述語論理などの区別と関連をどのように教科書に書くかということは、簡単に片付く問題ではない。しかし研究する価値のある大切な課題である。

4　　「くふうってなに？」　　　　　　大竹　宏周

大竹さんは、今年から歌志内学園の数学教員として勤務してる。歌志内学園は、道内 14 校目の義務教育学校である。小学校 6 年間と、中学校 3 年間が合体して一つになった学校である。赴任と同時に、9 年生 4 時間、3 年生、4 年生、5 年生を 5 時間ずつ担当している。教科担任制を 3,4 年制にも適用することは、赴任するまで知らされていなかった。

このような義務教育学校は、全国に 151 校ある。近年急速に増加している。施設が一つになっていない小中一貫型学校を含め、過疎化対策あるいは複式学級解消の名目で、小学校に教科担任制が先取りされ実施されている。議論が分かれる 3、4 年生にも教科担任制が実施されているところもある。

3 年生、4 年生、5 年生、9 年生と異なる学年を週 19 時間持ち、見学旅行などの行事で学校をあけるための振り替え授業を含めると、長期に渡って、週 25 時間の授業を持つことになるという。授業の準備をする時間がない環境である。また中には、小学校の免許を持たない教員に、3〜6 年生の教科を担当させる場合もある。特に、3、4 年生の教科担任制には子どもの成長段階からみて疑問が残るという。

そのような中でも、小学校、中学校を通して多くの学年を持つということは、中学校ギャップをなくすための一貫カリキュラムの開発に役立つ芽を持っているという。小学校の「工夫しましょう」という教材にヒントを得て、9 年生に 99^2 や 101^2 の計算を工夫する問題の提案ができたという。また、このような授業の持ち方の中で、小学校の教科書の「スパイラル」はほんとうの意味のスパイラルとはなってはおらず、ほぼ「こま切れ」と同じであることが明らかになり、本来のスパイラルとなるような教材配列の構成のためのヒントとなったと報告している。

義務教育学校のような、新しい試みを行う場合、9 年間を見通した教育ができる可能性がある。このような場合は、学習指導要領の枠をはずし、研究指定校などで自由に教育課程を組めるようにして、数年の、義務教育の内容を充実させるための研究を積み重ねるべきである。その上で、問題点を検討し対策を立てた後、全国で実施すべきものであって、過疎化対策のための方便として、なし崩し的に実施すべきものではない。そのような研究過程では、現行指導要領の細切れで中学校ギャップを放置した内容を改善し、数教協プログラムを参考にした、無理のない教育課程も実現できるかもしれない、との意見が聞かれた。

5　　「大学入試問題の分析」　　　　清水大惇

公立はこだて未来大学と藤女子大学の入試問題の丁寧な解答と、「講評」と称する文章の報告である。

公立はこだて未来大学の 2021 年度入試問題の「講評」は北数教の代数解析部会担当者が記述したものだとされている。これを合同教研の清水大惇氏のレポートとして提出しているのだから、代数解析部会担当者=清水氏と考えてよいのだと思う。

その中で、$\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{1}{\sin x}=\dfrac{4}{3}$ のとき $\cos x+\sin x$ の値を求めよという出題があるが、これを $\sin x+\cos x$ の値を求めよ、としなかった「出題者の優しさを感じた」という文章がある。$\sin x+\cos x$ の値を求める問題は、$\cos x+\sin x$ の値を求める問題からみると格段に難易度が上がると判断されている。

本当にそうだろうか、もしこの順序によって問題が難化すると考えるなら、普段の数学の伝え方に問題があるのではないだろうか。

また、不定方程式 $39x-17y=1$ の解 (x,y) は x と y が互いに素であることを示す問題は、「問題集や参考書ではあまり見かけないため、正答率は下がっただろう」という記述がある。

また、その正解として、x と y の最大公約数を g とすると、互いに素な整数 x', y' を用いて、

$$x=x'g\ ,\ y=y'g$$

とおける。これより、

$$39x'g-17y'g=1$$
$$g(39x'-17y')=1$$

$39x'-17y'$ は整数なので、$g=1$
よって、x と y は互いに素である。
という解答例を示している。

しかし、このことは、
$39x-17y=1$ の式を見るだけで明らかであり、このような持って回った解答をする必要がないのではないか。なぜなら、x,y が互いに素ではなく、共通因数を持てば、右辺は1になりえないから明らかなのである。

問題は、この問題が難問であることではなく、教員も生徒も、常に入試を意識し、入試で高得点をとるために、問題集や参考書によって訓練することが「数学の学び」であると勘違いしていることにあるのではないだろうか。日頃出題される入試問題に、議論せよ、述べよ、正しいことを証明せよなど、数学を議論することが求められることが少なく、求値問題、計算問題ばかりがあつかわれている。ペーパーテストで出題しやすく、採点基準も明確にしやすいからである。そのため、問題集や参考書にその傾向が色濃く現れる。しかし、そのような方向性は、数学を学んだり、伝えたりする本来の姿とはかけ離れているように思われる。数学の教員には、世の流れに惑わされず、数学をしっかり伝えるために必要なことをきちんと行う見識が求められるように感じる。

高校で数学の教員をしていると、その地域や環境によって、どうしても大学入試の問題を扱わなければならないことがある。というより、ほぼ必ずそういう場面に遭遇する。教員である以上質問があったら、答えたい、したがって、入試問題の解法について検討しておく必要に迫られる。また、そういう要求を持った生徒が多い学校では、ふだんの授業から、受験のための教育を取り入れなければならない状況もある。さらにいうならば、大学入試で、何人をどこそこの大学に入学させたかを競う風土ができている学校もある。そうなると、数学を伝えることではなく、大学に入学させることを目的とした授業になりがちである。その2つの「どこが違うのか」と感じる方もいると思うが、これが意外と大きな違いを生むことになるような気がする。

違いで、すぐに思いつくのは、授業がペーパーテストで高得点を取るための効率に左右されると言うことだろうか。できるだけ、練習問題を解く時間を確保するために、解法に必要な公式を暗記させ、繰り返し公式利用の練習をさせることになる。授業の中で、十分に多様な問題の練習をすることが困難なため、必然的に宿題を大量に出すことにつながる。授業を受けている生徒は、なぜこの練習をしなくてはいけないのかという疑問を封じられ、無駄なことを考えるよりもその時間があれば、勉強せよ、ということを強要される。楽しみのためではなく、まさに、強いて勉めさせられる「勉強」の連続は、苦しみでしかないことになる。

また、そこでは、教員も「成果」で評価される。担当している生徒の得点によって、教員としての力量が測られている、という無言の圧力に悩まされる。この「圧力」はときどき「無言」ではなくなるから厄介だ。また、毎年各大学で出題される入試問題が難なく解けるかどうかも教員としての「力量」に関わることになる。したがって、一般の教員は「解答」を求め、誰かが、解いてくれるのを待ち、それを手に入れようとする。受験産業はその要求にこたえるために、すばやく「入試問題正解」を準備する。しかし、受験産業は利益を産まない「正解」を準備することはない。あまり、有名でない大学の入試問題正解は準備しない。そこで、「力量」があると評価されたい教員群はこれらの正解を作り、この正解が一定の需要を生む。この世界では、正解をきちんと作って示すことは「価値」ある「教育」活動となる。

しかし、数学教育の目的が価値ある数学を伝えることにあるのだとしたら、このようなことはいかがなものかと考える。数学教育研究のめざすところは、いかに数学が人間にとっておもしろく心浮き浮きするものなのかを伝えるために、その内容、方法を研ぎ澄ましていくところにあるのではないだろうか。教育が人と人の営みであれば「つまらないことなのになぜこんなにも苦労しなければならないのか」という疑問が持たれるような方法は改めなければならない。また、入試問題が速く正確に解けることを示すことに価値があるのではなく、扱っている問題が価値ある数学にとってどのような意味を持つのか、またその扱いをどのようにすると魅力が伝わるのかということに心を砕くことにこそ価値があるのではないだろうか。

6 「星型多角形の内角の和とその作図」　　　成田　收

中学校の 2 年生で「三角形の 1 つの外角は、その外角と隣り合わない 2 つの内角の和に等しい」ことを学んだあとに、その応用問題として「星型多角形の内角の和」についてあつかわれることが多い。これに対し、3 年生で円周角を学んだ後にも、この問題を扱うと、数学の世界が広がるのではないかというレポートが今年度の札幌市教研で報告された。高岡聰氏の「星型多角形の内角の和」だ。

その内容は、概ね次のようなものであった。

正 5 角形の頂点を一つおきに結んだ対角線でできる星型（五芒星）の各内角はその中心角を考えると $\dfrac{360^\circ}{5}$ なので、一つの内角はその半分の $\dfrac{180^\circ}{5}$ である。したがって、内角の和は $5\times\dfrac{180^\circ}{5}=180^\circ$ である。円周角の原理から、頂点は同一円周上のどの位置にあっても同じなので、円周上に頂点を持つ星型 5 角形の内角の和は 180° であることがわかる。

さらに、一つの頂点を円周上から外側にはずした点に移動しても、その点における内角の減少は他の点の内角の増加になってあらわれるので、内角全体の和は変わらず、一般の星型 5 角形の内角の和は 180° であることがわかる。

というものであった。

このレポートには続きがあり、星型 7 角形への拡張は容易であるが、星型 9 角形に対しては複雑になりすぎる、ということが付け加えられていた。

成田のレポートは、円周角の議論を踏襲しながら、少し工夫すると、星型 n 角形の内角の和について、十分単純な理解ができそうであることを報告したものである。

結論としては、円周上に n 点 $\{1,2,3,\cdots,n=0\}$ を取り、これを m 番目ごとに結んでできる図形を $\dfrac{n}{m}$ 角形と名付けると、n と m が互いに素なとき、その内角の和は $|n-2m|\times 180^\circ$ であることがわかる、というものだ。

それは、次のようにしてわかる。

n 点 $\{1,2,3,\cdots,n=0\}$ で切り取られた円弧を $\{l_1,l_2,l_3,\cdots,l_n\}$ とし、円の中心を O、円周の長さを LL とする。

星型 $\dfrac{n}{m}$ 角形の任意の頂点を X とする。

X から m 進んだ点 P の位置を基点 0 として数え始める。また、$p=n-2m$ とする。

X における角 $\angle PXQ$ は、X から m 進んだ点 P を結ぶ辺 XP と、Q から m 進んで X にいたる辺 QX からできている。

全体が n 点なので、PQ 間では $n-2m$ 点進むことになる。

したがって、Q の位置は $p=n-2m$ であり、X の位置は $p+m=n-2m+m=n-m$ である。

そのため中心角 $\angle POQ$ に対応する円弧には p 個の円弧 $l_1,l_2,\cdots,l_p$ が含まれている。

そこで、p 個の弧、$l_1,\cdots,l_p$ をつないだ円弧を L_p とし、これに対応する円周角を $X=A_p$ とする。

$l_2,\cdots,l_{p+1}$ をつないだ円弧を L_{p+1} とし、これに対応する円周角を A_{p+1} とする。

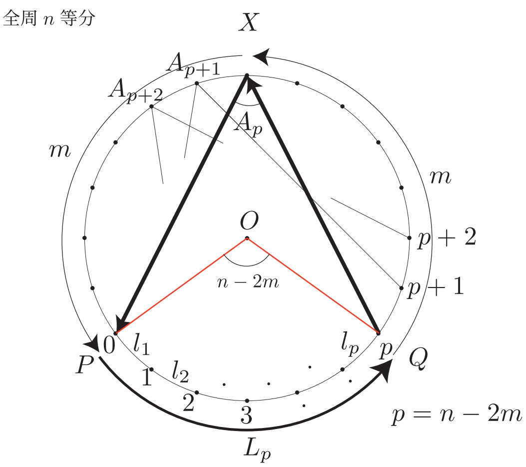
$\cdots$

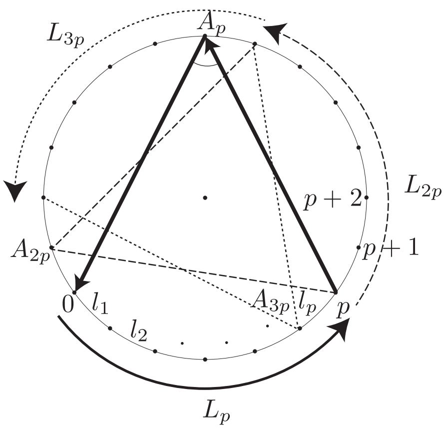
$l_{p+1},\cdots,l_{2p}$ をつないだ円弧を L_{2p} とし、これに対応する円周角を A_{2p} とする。

$l_{p+2},\cdots,l_{2p+1}$ をつないだ円弧を L_{2p+1} とし、これに対応する円周角を A_{2p+1} とする。

以下同様とし、

$l_n,l_1\cdots,l_{p-1}$ をつないだ円弧を L_{p-1} とし、これに対応する円周角を A_{p-1} とする。





弧 L_i が異なるとき、それに対応する頂点 A_i は異なる。

(1) n が奇数のとき、$p=n-2m$ は n と互いに素なため、p は n 倍されて初めて n の倍数となる。
このとき、$L_p,L_{2p},\cdots,L_{np}$ に対応する点 $A_p,\cdots,A_{np}$ は $A_1,A_2,\cdots,A_n$ のすべての点と一致する。
このとき弧の長さの和が円周の整数倍となる。$L_p+L_{2p}+\cdots+L_{np}$ は p 個の小さい弧 l_j を順番につないだもので、p 回円周を回っているので、その全長は $p\times LL$ となる。

(2) n と m が互いに素で、n が偶数のとき、$p=n-2m$ と n の最大公約数は 2 となり、p は $\dfrac{n}{2}$ 倍されて初めて n の倍数となる。

このとき、$L_p, L_{2p}, \cdots, L_{\frac{n}{2}p}$ に対応する点 $A_p, \cdots, A_{\frac{n}{2}p}$ は全頂点の半分 $A_2, A_4, \cdots, A_n$ の点と一致する。
このとき弧の長さの和が円周の整数倍となり、$L_p + L_{2p} + \cdots + L_{\frac{n}{2}p}$ は p 個の小さい弧 l_j を順番につないだもので、$\dfrac{p}{2}$ 回円周を回っているので、その全長は $\frac{p}{2} \times LL$ となる。
さらに、小さい円弧 l_i の一つ分ずれた、$L_{p+1}, L_{2p+1}, \cdots, L_{\frac{n}{2}p+1}$ に対応する点 $A_{p+1}, \cdots, A_{\frac{n}{2}p+1}$ は全頂点の半分 $A_1, A_3, \cdots, A_{n-1}$ の点と一致する。
このとき弧の長さの和が円周の整数倍となり、$L_p + L_{2p} + \cdots + L_{\frac{n}{2}p}$ は p 個の小さい弧 l_j を順番につないだもので、$\dfrac{p}{2}$ 回円周を回っているので、その全長は $\frac{p}{2} \times LL$ となる。

(3)　この二つを合わせて、全頂点に対応する円弧の長さは $p \times LL$ であることがわかる。
したがって、n が奇数の場合も偶数の場合も、全頂点に対応する中心角は p 回転分 $p \times 360^\circ$ となる。
円周角 $A_1, \cdots, A_n$ の和はその半分 $p \times 180^\circ = |n - 2m| \times 180^\circ$ となる、というものである。

このレポートについては、時間の関係で検討はなされなかった[*2]。

[*2] このレポートは n が偶数の場合の検討を怠たり一部に誤りがあったため、この場で訂正を含めて記述した。